TRAVAIL ET PUISSANCE

VII. 1. Travail et puissance

Pour soulever un corps, on doit fournir un effort ou un travail qui dépend du poids et de la hauteur.

VII. 1. 1. Travail élémentaire

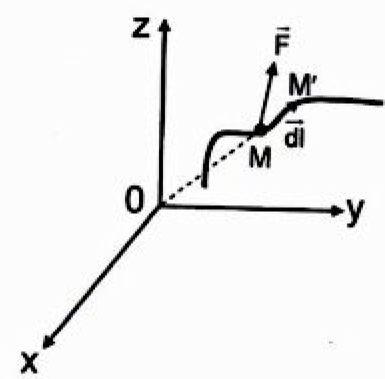
Si une force $\vec{F}$ agit sur un point matériel, le déplaçant de M à M′, tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl}$, le travail élémentaire effectué entre t et t+dt est le produit scalaire de la force et le déplacement :

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl} \quad \text{(Joule)}$$

♣ Dans le repère cartésien :

$$\delta W = f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz$$

$$\overrightarrow{dl}\begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}$$



♣ Dans le cas où plusieurs forces $\vec{F}_i$ exercées sur le point matériel, la somme des différents travaux élémentaires pendant dt est égale au travail élémentaire de la résultante $\vec{F}$ des forces appliquées :

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i.\overrightarrow{dl} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right).\overrightarrow{dl} = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

- lorsque $\delta W > 0$ ($\vec{F}$ et $\overrightarrow{dl}$ ont le même sens) : le travail est dit **moteur**

- lorsque $\delta W < 0$ ($\vec{F}$ et $\overrightarrow{dl}$ ont le sens contraire) : le travail est dit **résistant**



Remarques :

- une force $\vec{F}$ perpendiculaire à un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ n'effectue aucun travail puisque $\vec{F}.\vec{dl} = 0$
- dans le cas d'un référentiel non galiléen, il est nécessaire de tenir compte des forces d'inertie que l'on doit inclure dans la résultante des forces $\vec{F}$ appliquées sur le point matériel.

VII. 1. 2. Puissance

La puissance fournie au point matériel est le travail fourni par unité de temps :

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}(M).\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{F}(M).\vec{V} \quad (\text{Watt})$$

$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$

VII. 2. Energie

VII. 2. 1. Champ de forces

En chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace, la force a de la forme $\vec{F}(M)$, ce qui définit un champ de forces.

VII. 2. 2. Energie potentielle

Considérons un déplacement élémentaire dl d'un point matériel M, soumis à un champ de forces $\vec{F}(M)$. Par définition, cette force dérive d'une fonction scalaire, notée $E_p(M)$ appelée « énergie potentielle » lorsque le produit scalaire $-\vec{F}(M).\vec{dl}$ est égale à la différentielle totale de la fonction $E_p(M)$: $dE_p(M) = -\vec{F}(M).\vec{dl}$

Exemple : le point matériel n'est soumis qu'à son poids :

$$P_z = -mg \Rightarrow E_p(M) = -\int \vec{P}.\vec{dl} + Cte = mgz + E_p(0) = mgz$$

Une force dérivant d'une énergie potentielle est dite « conservative », et s'écrit :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$$



VII. 2. 3. Théorème de l'énergie cinétique

« La variation de l'énergie cinétique d'un système physique entre deux points M_1 et M_2 est égale au travail effectué entre ces deux points de toutes les forces agissant sur ce système »

Soit un point matériel soumis à la force $\vec{F}$, qui se déplace entre M_1 et M_2, le travail effectué par le point M entre les deux instants est :

$$W_{1\to 2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \int_{M_1}^{M_2} m\vec{\gamma}\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\,dt = \int_{M_1}^{M_2} m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\,dt = \int_{M_1}^{M_2} m\left(d\vec{V}\right).\vec{V}$$

$$W_{1\to 2} = \int_{M_1}^{M_2} d\left(\frac{1}{2}m\vec{V}^2\right) \Rightarrow W_{1\to 2} = Ec_2 - Ec_1 = \Delta Ec$$

VII. 2. 4. Conservation de l'énergie totale d'un système

En général, le point matériel qui décrit une trajectoire © dans un référentiel $\Re$, peut être soumis à l'action de deux genres de forces :

♠ forces conservatives (d'un champ de forces) dérivant d'une fonction énergie potentielle, satisfaisant à $dE_p = -\delta W_p$

♠ forces dissipatives (forces de frottement) ne vérifient pas $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$, et que l'application du théorème cinétique dans ce cas conduit à :

$$dE_c = \delta W = \delta W_p + \delta W_d$$

δW_p : associé aux forces conservatives

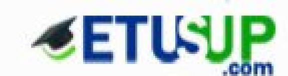
δW_d : associé aux forces frottements

Comme $\delta W_p = -dE_p$, il vient que $d(E_c + E_p) = dE_m = \delta W_d < 0$

- En présence des forces de frottements, une partie de l'énergie est fournie au milieu extérieur sous forme de chaleur.

- En l'absence des forces de frottements, la relation exprimant la conservation de l'énergie mécanique entre t=0 et t sera :

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_p(M) = \frac{1}{2}mv_0^{\,2} + E_p(M_0) = Cte$$



VII. 2. 5. Positions d'équilibre et stabilité

Dans le cas où le point matériel, soumis à une force dérivant d'une énergie potentielle, se déplace sur l'axe OX.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p \Rightarrow F = \frac{-dE_p(x)}{dx}$$

x_0 est position d'équilibre ssi $F(x_0) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dE_p(x)}{dx}\right) = 0$, càd que l'équilibre est atteint aux extremums de $E_p(x)$.

Si nous effectuons un petit déplacement $(x - x_0)$ à partir de la position d'équilibre, on peut écrire : $F(x) = F(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x0}$

$$\Rightarrow F(x) = -(x - x_0)\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x0}$$

<u>On peut envisager deux cas</u> :

1°) si $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x0} > 0$: $F(x)$ est de signe opposé à $(x - x_0)$, le point matériel soumis à une force qui le rappelle vers sa position d'équilibre x_0, on dit que **l'équilibre est stable.**

2°) si $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x0} < 0$: $F(x)$ est de même signe que $(x - x_0)$, le point matériel tend à s'écarter de sa position d'équilibre, on dit que **l'équilibre est instable.**

